# Xác Xuất Thống Kê.

**Chương 1 xác xuất**

**Tuần 1**

1. Kiến thức về tổ hợp xác xuất.

Hoán vị n phần tử : Pn = n!.

Chọn k phần tử không có thứ tự trong tập n phần tử :

Chọn k phần tử có thứ tự trong tập n phần tử :

* Quy tắc cộng : công việc a có m phương án thực hiện và mỗi công việc có n1,n2,n3,..nm cách làm 🡺số cách = n1+n2+n3+….+nm.
* Quy tắc nhân : công việc a có m giai đoạn mỗi giai đoạn có n1,n2,n3,..nm cách làm
* Số các = n1.n2.n3…nm.

1. Không gian mẫu và biến số.

* Không gian mẫu là tập hợp các kết quả của phép thử ngẫu nhiên, kí hiệu : Ω
* Biến cố là 1 một tập con bất kì trong không gian mẫu, kí hiệu A,B,C,…
* Biến cố sơ cấp là biến cố chỉ gồm 1 phần tử.
* Biến cố a được cho là xảy ra nếu có ít nhất 1 biến cố trong a xuất hiện.

1. Biến cố đặc biệt.

* Biến cố không thể : là biến cố không thể xảy ra, kí hiệu : Φ
* Biến cố chắc chắn : là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu : Ω

1. Các phép toán trên biến cố.

* Biến cố đôi cua A kí hiệu là A ngang, A ngang = A/Ω, xảy ra nếu A không xảy ra.
* Giao của A và B xảy ra nếu A và B đồng thời xảy ra, kí hiệu : A⌒B
* Hợp của A và B, kí hiệu A⊔B xảy ra nếu ít nhất A hoặc B xảy ra.
  + Nhận xét :
    - Hai biến cố xong khắc khi và chỉ khi A⌒B = Φ
    - Hai biến cố đối nhau thì xung khắc với nhau, nhưng điều ngược lại nói chung là không đúng.

1. Luật de-morgan về phủ định :

* Phủ định của 1 hợp bằng giao các phủ định
  + Tức là : ⊔AI ngang = ⌒(AI ngang).
* Phủ định của 1 giao bằng hợp các phủ định.
  + Tức là ⌒Ai ngang = ⊔(Ai ngang).

1. Xác xuất có điều kiện :

Xác xuất = biến cố / Ω.

Xác xuất có điều kiện của biến cố A với điều kiện biến cố B xảy ra gọi là xác xuất có điều kiện của biến cố A. kí hiệu là P(A/B)

**Bài tập tuần 1 :**

1. **a/ Ω = (SSS,SSN,SNN,NNN).**

**b/ A = (SSS,SNN).**

**c/ B = (SSN).**

1. **Ω = C(10,100).**

**a/ P(A) = C(10,50)/C(10,100) = 5,9/10000**

**b/ P(B) = C(10,33)/C(10,100) = 5,34/10000**

**c/ P(C) = C(5,20).C(5,50)/C(10,100) = 1,9/1000**

1. **Ω = C(3,15)**

**a/ P(A) = 1-(C(3,12)/C(3,15)) = 47/91.**

**b/ - gọi P(B) là xác xuất lấy được 2 quả hỏng khi chắc chắn có ít nhất 1 quả hỏng là :P(B/A) C(2,3).C(1,13)/ Ω.**

* **P(A) là Xác xuất lấy được ít nhất nhất 1 quả hỏng là : P(A) = 1-(C(3,12)/C(3,15)).**
* **P© là Xác xuất lấy được 2 quả hỏng là : P© = 1-(C(3,12)/C(3,15)). C(2,3).C(1,13)/ Ω**

**Tuần 2**

1. Công thức nhân xác xuất.

Cho 2 biến cố A và B với P(A) > 0, khi đó :

P(B/A) =P(A/B) /P(A) 🡺 P(AB) = P(A)/P(B/A)A.

Tương tự ta sẽ có :

P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B).

Tổng quát : cho n biến cố P(a1 🡪 an). Khi đó :

P(a1🡪an) = P(a1).P(a2/a1).P(a3/a2.a1)....P(an/a1...an-1)).

1. Biến cố đọc lập.

Biến cố đọc lập nếu P(AB) = P(A).P(B)A.

Nhận xét :

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì P(A/B) = P(a) và P(B/A) = P(B).

1. Công thức xác xuất toàn phần và công thức bayes.

* Nhóm n biến cố H 1 🡪 được gọi là nhóm đầy đủ nếu thỏa mãn hai điều kiện sau.
* Hai biến cố bất kỳ xung khắc với nhau và hợp của tất cả các biến cố bất kỳ bằng rỗng.

Đinh lí công thức xác xuất đầy đủ:

Nói riêng ta có P(B) = P(A).P(B\A)+P(Angang).P(B\Angang).

Vd : có 2 lô sản phẩm lo thứ nhất có 50 sp, trong đó có 30 sản phẩm tốt và 20 sp xấu,

Lô thứ 2 có 40 sp có 25 sp xấu.tính xã xuất chọn đc sp xất trong khi chọn 1 sp.

Giải : P = P(H1).P(A\H1) + P(H2).P(A\H2).

= 1/2\*30/50+1/2\*25/40 = 49/80.

* + Ý nghĩa công thức toàn phần : giúp ta atinhs xác xuất xảy ra 1 biến cố dựa và một nhóm đầy đủ các giả thiết cho phối nó.

Cho nhóm biến cố A là một nhóm biến cố đầy đủ.

P(Hi\A) =P(Hi).P(A\Hi)/P(A) = P(Hi).P(A\Hi)/.

Vd : một trạm thu phát sóng có xác xuất 0,85 và 0,15 với tín hiệu A và B, trên đường truyền tín hiệu 1/7 tín hiệu A bị bóp méo thành B và 1/8 tín hiệu B bị bóp méo thành A.

Khi dó xác xuất thu được tín hiệu A : P(A) = P(Ha).P(A\HA) +P(Bb).P(A\PHb) = 0.85\*(1-1/7)+0.15\*(1/8) = 0.747.

Áp dụng công thức bayes : P(Ha\A) = P(HA).P(A\HA)/P(A) = 0,85.(1-1.7)/0.747 = 0.098.

Khả năng trạm phát tín hiệu phát tín hiệu A ta dung công thức bayes

Vd : tìm khả năng tạm phát phát tín hiệu A : 0.15.(1/8)/0.0747.

* + Ý ý nghĩa của công thức bayes : các xác xuất 1🡪 N là các xác xuất của các giả thuyết trước khi sử dụng thí nghiệm và được gọi là xác xuất tien nghiệm.
  + Còn các xác xuất có điều kiện có được sau khi tính gọi là xác xuất hậu nghiệm , do đó công thức bayes gọi là công thức hậu nghiệm hay còn gọi là công thức đánh giá lại xác xuất các điều kiện có thể xảy ra.

1. Dãy phép thử Bernoulli.

* Dãy n phép thử được ọi là dãy phép thử Bernoulli nếu thỏa mãn :
  + Các phép thử đọc lập .
  + Chỉ có hai biến cố là thất bại hoặc thành công trong dãy phép thử.
  + Xác xuất xuất hiện biến cố A là không đổitrog các phép thử.
* công thức xác xuất nhị thức : kí kiệu P(n) K là xác xuất có đúng k lần xuất hiện biến cố A trong dãy phép thử bernoulli , khi đó :

*p(n)K =* C(k,n).pk.(1-p)n-k.

vd : xác xuất để 1 quả trứng đem ấp nở là 0.85 . đem ấp 10 quả trứng xác xuát để có đúng 8 quả trứng nở ra gà con là.

n = 10 , p = 0,85.

Xác xuất có đúng 8 quả trứng nở ra gà con là : P(10)8 = C(8,10).0,858.0,1510-8.

Vd : tín hiệu được phát đi 3 lần đọc lập với nhau . xác xuất để thu được mỗi lần là 0.4.

a/ thu được 2 lần.

b/ thu được thông tin.

c/ xác xuất thu được > 0,99 thì Phải phát bn lần.

giải : a/ P(3)2 = c(2,3).0,42.0,61

b/ 1 – P(3)0 = C(0,3).1.0,63

c/1-P(n)0 = C(0,3).1.0.63 > 0,99

1. Số lần có khả năng lớn nhất.

Tìm K sao cho xác xuất P(n)K đạt giá trị lớn nhất :

Đặt q = 1 – p và gọi K là giá trị cần tìm. Khi đó K là số nguyên thỏa mãn :

**n.p-q <K<np-q+1**

Vd : a textile factory has 50 looms, probability looms is broken in a shift is 0.1, find the max of probability looms broken in a shift.

N = 50 , p = 0,1 🡺q = 0.9 🡺 50.0,1-0,9 < k < 50.0,1-0,9+1 🡺4,1 < k < 5,1

Kí hiệu R là giá trị ngẫu ngiên nằm trong đoạn 0🡪1 được phát sinh bởi hàm ramdom máy tính.

Mô phỏng gieo 1 đồng xu .

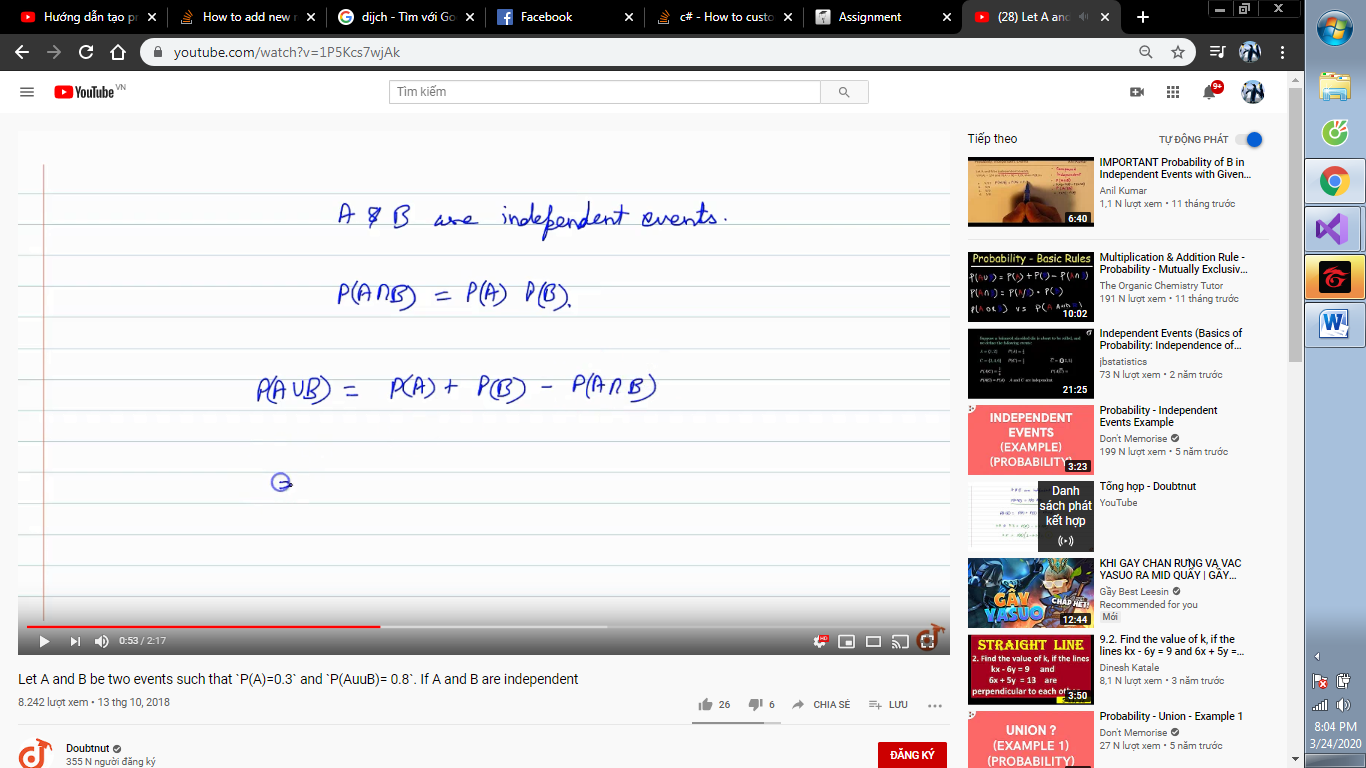
Phát sinh giá trị của R.

R<0,5 sắp và ngược lại

Công thức tính : P(AB), P(A∪B,   
P(AB∪C¯), P(A|B)

P(AB) = P(A).P(B/A)=P(B).P(A/B).

* vào kết quả của các phéo thử.



**Bài tập tuần 2 :**

1. **a/ dừng lại ở lần lấy thứ 3 là : C (2,3).C(1,7)/C(3,10) = 0,175**

**b/ dừng lại sau không quá 3 lần :**

**TH1 : dừng ở 1 : C(1,7)/C(1,10) = 0,7**

**TH2 : dừng ở 2 : C(1,3).C(1,7)/ C(2,10) = 7/15**

**TH3 : dừng ở 3 : C(2,3).C(1,7)/C(3,10)= 0,175**

**Bài tập chương 1 : nộp vào hệ thống.**

1. a/ đặt biến cố lấy nhất 1 bi xanh là A vậy biến cố đối là không lấy được bi xanh nào

xác xuất của A : P(A) = 1 – C(14,5)/C(20,5) = 0,87.

b/đặt biến có lấy ít nhất 2 bi xanh và 2 bi đen là B :

ta có các TH :

1 : 2x,2d,1t : C(6,2).C(4,2).C(10,1) /C(20,5) = 0,58

2 : 3x,2d : C(6,3).C(4,2)/C(20,5) = 5/646

3 : 2x,3d : C(6,2).C(4,3)/C(20,5) = 5/1292

P(B) = 1 +2 +3.

c/ đặt biến cố lấy được nhiều nhất 2 bi trắng C :

Th1 : 1 : C(10,1).C(10,4)/C(20,5) = 175/1292

Th2 : 2 : C(10,2).C(10,3)/C(20,5) = 225/646

Th3 : 3 : C(10,5)/C(20,5) = 21/1292.

P(C) = 1/2 .

1. P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A⌒b) = P(A) + P(B) – P(A).P(B) = 0,7+0,4 – 0,4.0,7 = 0,82.

P(B¯) = 0,3.

P(A/ B¯) = P(A⌒ B¯) P(B¯) = 0,4.0,3/0,3 = 0,4.

P(AB¯) = 0,3.0,4 = 0,12

1. a/

Th 1 : lần 1 là phế phẩm : P1 = (11/39).(27/38) = 0,2

Th 2 : lần 1 là chính phẩm : P2 = (28/39).(27/38) = 0,51

Vậy P = 0,71.

b/

P = (28/39).(27/38).(26/37) = 0,3584.

1. Phải chọn tối thiểu 50 phế phẩm để có tỉ lệ có 1 phế phẩm lớn hơn 99%.

**Tuần 4**

1. Biến Ngẫu nhiên :
   1. Định nghĩa.

Hàm X xác định trên không gia mẫu Ω và nhận giá trị trong R được gọi là biến ngẫu nhiên nếu với mọi X € R tập kết quả (Ѿ :X(Ѿ) < x) lập thành 1 biến cố ngẫu nhiên.

* Tập hợp các giá trị X được họi là miền giá trị của X, kí hiệu là X(Ω).

Nói một cách khác, biến ngẫu nhiên là đại lượng có thể nhận giá trị này hay giá trị khác tùy thuộc

Phân Loại :

* Biến Ngẫu nhiên rời rạc : có giá trị số lượng hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.
  + Vô hjan đếm được là : số lượng phần tử vô hạn và tong tại quy tắc đánh số các phần tử của nó.
* Biến Ngẫu Nhien liên tục :
  + Tập giá trị tạo thành các đoạn, khoảng hoặc hợp các đoạn khoảng.
  + Với mọi c ta có xác xuất X = c là 0.

1. Hàm phân phối.

Đijng nghĩa : Hàm số thực FX(x) = P(X<x), x thuộc R đuộc gọi là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X.

Nhận xét : Hàm phân phối chính là xác xuất X nhận giá trị nhỏ hơn x tức từ - vô cùng đến x.

* FX(x) dơn điệu không giảm với mọi x thộc R.
* FX(x) liên tục tría với mọi x tức là :

Lim(FX(x) = FX(x0), với mọi R.

* Lim(FX(x)) x->+ vô cùng bằng 1 và trừ vô cùng bằng 0.
* giá trị cảu hàm phân phối luôn nằm trong khoảng 0-1

Nhận xét :

P(X > a) = 1-F(a) (hàm phân phối của a.

P(a< X<b) = F(b) – F(a).

1. Biến ngãu nhiên rời rạc

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với X(Ω)

P(X=x) x thuộc Ω

Khi đó p(x) =

1. X không thuộc Ω.

Được gọi là hàm khối xác xuất trong truongf hợp X(Ω) x1 🡪 xn hữu hạn Pi = P(X = xi), ta có bảng phân phối xác xuất.

X x1 x2 x3….

P P1 P2 P3…. P tổng bằng 1.

Hàm phân phối của x sẽ là : FX(x) = P(X<x) = tổng của (xi<x)P(X=xi).

Vd : 12 sp 4x 8v lấy 2 sp gọi x là số chính phẩm tìm phân phối của X xác định hàm phân phối xác định hàm phân phối và tính chất xác xuất (1 <= X < 3)

P(x = 0) = C(4,2)/C(12,2) = 1/11

P(x = 1) = 16/33

P(x = 2) = 14/33

BẢNG PHÂN PHỐI XÁC XUẤT :

X 0 1 2

P 1/11 16/33 14/33

1. x<=0.

1/11 0<x<=1.

Hàm phân phối : FX(x)

1/11 + 16/33 1<x<=2 .

1/1+16/33+14/33 X>2.

1. Biến ngẫu nhiên liên tục

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X khi đó tồn tại hàm FX(x) sao cho ta biểu diễn như sau :

FX(x) = tích phân trừ vô cùng đến x f(t)dt, x thuộc R.

Hàm f(x) được gọi là hàm mật độ của X.

Tính chất của hàm mật độ :

1. F(x) >= 0.
2. Tích phân từ - vô cùng đến cộng vô cùng của f(x)dx = 1.

Nhận xét : i) P(X = c) = 0 với mọi hằng số c

ii) xác xuất x rơi vào đoạn khoảng hoặc vùng nào thì sẽ bằng tích phan của fxdx trên đoạn đó.

P(a<= X<=b) = ... =P(a<X<b) =FX(b) – FX(a).

iii) nếu fx là hàm mật độ thì hàm phân phối FX(x) = tích phân từ trừ vô cùng đến x của f(t)dt.

1. Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên :

Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập với nhau nếu như các biến cố (X<a\_ và (Y<b) độc lập với mọi cặp giá trị (a,b) tức là : P(x<a,y<b) =P(X<A).P(y<b).

Định nghĩa này cũng được dùng với nhóm n biến ngẫu nhiên.

1. Các số đặc trưng :
   1. Kỳ vọng toán :

Kí hiệu E(X) là 1 số được xác định như sau :

* Nếu X có phân phối rời rạc với phân phối xác xuất P(X =xk) = Pk, k =1,2,...

Thì E(X) = tổng xích ma của X(i).(Pi).

* Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ f(x) thì E(X) = tích phân từ âm đến dương vô cùng của x.f(x) .dx
* Trong trương hợp tổng xích ma tiến đến vô cung hoặc tích phân từ âm đến dươn vô cùng của giá trị tuyệt đối cua x.f(X).dx phân kỳ thì ta nói biến không có kỳ vọng.

TÍCH CHẤT :

* KỲ CỌNG CỦA HẰNG SỐ LÀ HẰNG SỐ.
* HẰNG SỐ THÌ CÓ THỂ ĐƯA RA KHỎI DÂU KỲ VỌNG.
* KỲ VỌNG CỦA TỔNG HOẶC HIỆU BẰNG TÔNG HOẶC HIỆ UCASC KỲ VỌNG.
* NẾU X VÀ y LÀ HAI BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỌC LẬP THÌ KỲ VỌNG CỦA TÍCH BẰNG TÍCH CÁC KỲ VỌNG.
* KỲ VỌNG CẢU 1 BIẾN NGẪU NHIÊN THỂ HIỆN GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CẢU BIẾN NGẪU NHIÊN ĐÓ.
* NHÌN VÀO KỲ VỌNG TA CÓ THỂ XÉT ĐƯỢC SỰ CÔNG BẰNG CỦA TRÒ CHƠI MAY RỦI.
* Nếu g(X) là hàm liên tục thì g(X) cũng là biến ngẫu nhiên và kỳ vọng của nó được tính là :
  + Tổng xích ma của g(xi).pi nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc.
  + Tích phân từ âm đến dương vô cùng của g(X)fX(x) nế X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật đọ f(x).
  1. Phương sai :

Giả sử biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng E(X). Nếu tồn tại kỳ vọng E(X-EX) bình phương thì ta gọi giá trị này là phườn sai của X kí hiệu là DX hay Var(x) :

Dx = E(X-EX) bình phương.

Xích ma X = căn bậc 2 của DX GỌI là độ lệch chuẩn.

Tính chất :

Phương sai của hằng số = 0.

Có thể đưa hằng số ra khỏi phương sai nhưng phải bình phương lên.

DX = E(X) bình trừ bình phương kỳ vọng của X – EX bình phương.

Phương sai của 1 tổng và hiệu bằng **tổng** của 2 phương sai khi là biến độc lập.

Kì vọng E(X2) =

* Nếu X là biến ngẫu nhien rời rạc : = tổng xích ma của pi.xi bình phương.
* Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục : = tích phân từ amm đến dương vô cùng của x bình phương .f(x).dx.
* Phương sai càng nhỉ thì các giá trị khếch tán càng gần với kỳ vọng.
* Trong kỹ thuật phương sai đặc trung cho sai số của phép đo, còn trong kinh doanh đại diện cho tính rủi ro của các quyết định.

**C. Trung vị .**

**Là median trung vị của biến ngẫu nhiên X kí hiệu là med(x)**

**P(x<med(X) <= ½ và P (x>med(X))<=1/2.**

**biến ngãu nhiên có nhiều trung vị và trong trường hợp X là biến ngẫu nhiê liện tục thì med(X) chính là nghiệm của phương trình.**

**FX(x) = ½.**

* 1. **Phân vị và giá trị tới hạn.**

**Phân vị mức alpha, 0<alpah<1 thuộc phân phối tương ứng với biên ngẫu nhiên X LÀ GIÁ TRỊ x ALPHA THỎA MÃN P(X<xalpha) = alpha.**

**Giá trị tới hạn thì P(X>xalpah) = alpha.**

**Tuần 5**

**Các phân phối quan trọng :**

* **Phân phối Bernoulli :** 
  + - **Kí hiệu : X ~ Ber(p) : bảng phân phối cso dạng :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **X** | **0** | **1** |
| **P** | **1-p** | **p** |

* + - **Tính chất :**

**X ~ Ber(p) thì E(X) = p và DX = p.(1-p).**

* **Phân phối nhị thức :** 
  + - **Kí hiệu : X ~B(n,p)**
    - **P(X = k) = pn(K) = C(k,n) pk(1-p)n-k.**
    - **Tính chất :**

**X ~ B(n,p) thì E(X) = np và DX = np.(1-p).**

**Nếu các biến ngẫu nhiên : Xi, i = 1🡪n độc lập và Xi ~ Ber(p) thì :**

**X = x1 + x2 +….xn ~B(n,p)**

**B(1,p) chính là Ber(p).**

* **Phân phối boisson :**
  + - **Kí hiệu : X ~ Pois(lamda) nếu X nhận giá trị trong tập N = {0,1,2,3,…} với xác xuất : P (X = k) = (lamda)k.e-lamda/k! , k = 0,1,2,3,…**
    - **Tính chất :**

**E(X) = lamda, D(X) = lamda.**

**X1, x2 độc lập và có phân phối Poisson với tham số lamda1 và lamda 2 khi đó X = x1+x2 ~ Pois(lamda1, lamda2).**

* **Phân phối hình học :** 
  + - **Kí hiệu : P (X = k) = (1 – p) k-1.p.**
    - **Tính chất : E(X) = 1/p, D(X) = (1-p)/p2.**
* **Phân phối siêu bội :** 
  + - **Kí hiệu : X ~ (N,M,n) với tham số n < M < N. nếu giá trị của X là : 0,1,2,…**

**P(X = k) = C(k,M).C(m-k,N-M)/ C(n,N).**

* + - **Tính chất : E(X) = n.M/N,D(X) =( n.m/n).(1-M/N).(N-n/N-1)**
* **Phân phối đều (Hàm ramdom) :** 
  + - **Kí hiệu : X ~ U(a,b) nếu hàm mật độ của nó có dạng :**

**1/(b-a) x thuộc [a,b].**

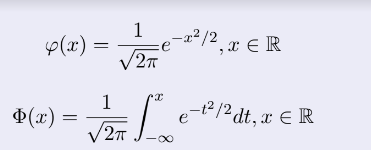
**F(X) =**

1. **x khác [a,b].**
   * + **Tính chất : E(X) = a+b /2 , DX = (b-a)2/12.**

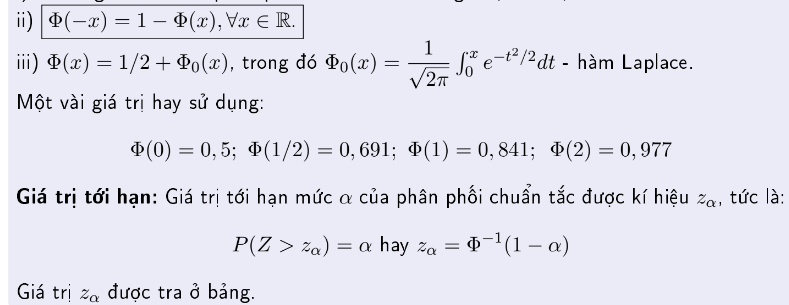
* **Phân phối chuẩn :** 
  + - **Kí hiệu : X ~ N(u,o2)**

**F(x) =( 1 / o.căn(2pi)) . e-(x-u)bình / 2o bình.**

* + - **Khi u = 0 và o = 1, X có phân phối chuẩn tắc : N(0,1) . hàm mật độ :**

****

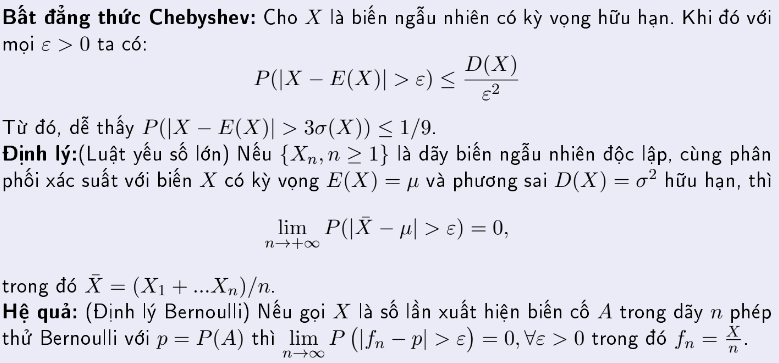
**Biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc kí hiệu là Z :**

****

* + - **Tính chất : X ~ N(u,o2) thí E(X) = u, D(X) = o2.**
    - **Nếu X ~ N(u,o2) thì Y = aX +b ~ N(au+b,a2.o2), a != 0.**
    - **Nếu X ~ N(u,o2) thì : X-u / o = N(0;1).**

**Tuần 6 Các định lí giưới hạn :**

1. **Luật số lớn :**

****

**Giua ky chuong 1 🡪 slide 33 chuong 2.**